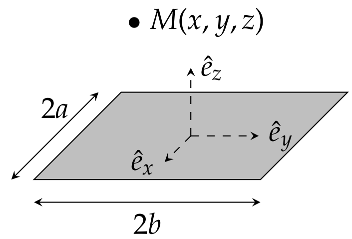
Champ électrique créé par une plaque chargée finie

On souhaite calculer le champ électrique généré par une plaque chargée de taille finie ayant une densité surfacique de charge σ. La géométrie du problème est la suivante :



D'après la loi de Coulomb, l'expression du champ électrique est :

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{u=-a}^{a}\int_{v=-b}^{b}\frac{\sigma}{\left((x-u)^2+(y-v)^2+z^2\right)^{3/2}}\Big((x-u)\hat{e}_x+(y-v)\hat{e}_y+z\hat{e}_z\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

On commence par calculer la composante E_x :

$$E_x(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{u=-a}^{a}\int_{v=-b}^{b}\frac{(x-u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\left((x-u)^2+(y-v)^2+z^2\right)^{3/2}}$$

L'intégration suivant x se fait simplement :

$$\begin{aligned}
E_x(x,y,z) &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v=-b}^{b}\left[\frac{-1}{\left((x-u)^2+(y-v)^2+z^2\right)^{1/2}}\right]_{u=-a}^{a}\mathrm{d}v\\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v=-b}^{b}\left[\frac{1}{\left((x+a)^2+(y-v)^2+z^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left((x-a)^2+(y-v)^2+z^2\right)^{1/2}}\right]\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

La dérivée de la fonction argsh(x) est $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui indique comme intégrer. On introduit $c_\pm = \sqrt{(x\pm a)^2+z^2}$ et $p = \frac{y-v}{c_+}$, $q = \frac{y-v}{c_-}$ et on obtient le résultat pour E_x. Il n'y a pas de signe moins car on échange les limites et $c_+\mathrm{d}p = -\mathrm{d}u, c_-\mathrm{d}q = -\mathrm{d}v$.

$$\begin{aligned}
E_x(x,y,z) &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{p=\frac{y-b}{c_+}}^{p=\frac{y+b}{c_+}}\frac{c_+\mathrm{d}p}{c_+\sqrt{p^2+1}}-\int_{q=\frac{y-b}{c_-}}^{q=\frac{y+b}{c_-}}\frac{c_-\mathrm{d}q}{c_-\sqrt{q^2+1}}\right]\\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\operatorname{argsh}(\frac{y+b}{c_+})-\operatorname{argsh}(\frac{y-b}{c_+})-\operatorname{argsh}(\frac{y+b}{c_-})+\operatorname{argsh}(\frac{y-b}{c_-})\right]\\
E_x(x,y,z) &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\operatorname{argsh}(\frac{y+b}{\sqrt{(x+a)^2+z^2}})-\operatorname{argsh}(\frac{y-b}{\sqrt{(x+a)^2+z^2}})\right.\\
&\qquad\left.-\operatorname{argsh}(\frac{y+b}{\sqrt{(x-a)^2+z^2}})+\operatorname{argsh}(\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+z^2}})\right]
\end{aligned}$$

De même, E_y :

$$E_y(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[\operatorname{argsh}(\frac{x+a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2}}) - \operatorname{argsh}(\frac{x-a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2}}) \\ - \operatorname{argsh}(\frac{x+a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2}}) + \operatorname{argsh}(\frac{x-a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2}})\Bigg]$$

Le calcul de E_z est différent :

$$E_z(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{u=-a}^{a}\int_{v=-b}^{b}\frac{z\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{((x-u)^2+(y-v)^2+z^2)^{3/2}}$$

On commence avec $X = x-u$ et $Y = y-v$. Comme précédement, il n'y a pas de signe moins car on inverse les limites et $\mathrm{d}X = -\mathrm{d}u, \mathrm{d}Y = -\mathrm{d}v$.

$$E_z(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{X=x-a}^{x+a}\int_{Y=y-b}^{y+b}\frac{z\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Y}{(X^2+Y^2+z^2)^{3/2}}$$

Ensuite on introduit θ tel que $Y = \sqrt{X^2+z^2}\tan\theta$. On a $\mathrm{d}Y = \sqrt{X^2+z^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ et $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
E_z(x,y,z) &= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{X=x-a}^{x+a}\int_{\theta=\arctan\left(y-b/\sqrt{X^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(y+b/\sqrt{X^2+z^2}\right)}\frac{\sqrt{X^2+z^2}\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta\,((X^2+z^2)(1+\tan^2\theta))^{3/2}}\mathrm{d}X \\
&= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{X=x-a}^{x+a}\frac{\mathrm{d}X}{X^2+z^2}\int_{\theta=\arctan\left(y-b/\sqrt{X^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(y+b/\sqrt{X^2+z^2}\right)}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{X=x-a}^{x+a}\frac{\mathrm{d}X}{X^2+z^2}\left[\sin\left(\arctan\left(\frac{y+b}{\sqrt{X^2+z^2}}\right)\right) - \sin\left(\arctan\left(\frac{y-b}{\sqrt{X^2+z^2}}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Comme $\arctan\psi = \arcsin\left(\frac{\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
E_z(x,y,z) &= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{X=x-a}^{x+a}\frac{\mathrm{d}X}{X^2+z^2}\left[\frac{\frac{y+b}{\sqrt{X^2+z^2}}}{\sqrt{1+\frac{(y+b)^2}{X^2+z^2}}} - \frac{\frac{y-b}{\sqrt{X^2+z^2}}}{\sqrt{1+\frac{(y-b)^2}{X^2+z^2}}}\right] \\
&= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{X=x-a}^{x+a}\frac{\mathrm{d}X}{X^2+z^2}\left[\frac{y+b}{\sqrt{(y+b)^2+X^2+z^2}} - \frac{y-b}{\sqrt{(y-b)^2+X^2+z^2}}\right]
\end{aligned}$$

On introduit θ et φ tels que $X = \sqrt{(y+b)^2+z^2}\tan\theta$, et ainsi $\mathrm{d}X = \sqrt{(y+b)^2+z^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ dans le premier terme et $X = \sqrt{(y-b)^2+z^2}\tan\varphi$, donc $\mathrm{d}X = \sqrt{(y-b)^2+z^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$ dans le second terme. Ainsi on obtient :

$$E_z(x,y,z) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[\int_{\arctan\left(x-a/\sqrt{(y+b)^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(x+a/\sqrt{(y+b)^2+z^2}\right)}\frac{(y+b)\sqrt{(y+b)^2+z^2}\,\mathrm{d}\theta}{(((y+b)^2+z^2)\tan^2\theta+z^2)\cos^2\theta\sqrt{((y+b)^2+z^2)(1+\tan^2\theta)}} \\ - \int_{\arctan\left(x-a/\sqrt{(y-b)^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(x+a/\sqrt{(y-b)^2+z^2}\right)}\frac{(y-b)\sqrt{(y-b)^2+z^2}\,\mathrm{d}\varphi}{(((y-b)^2+z^2)\tan^2\varphi+z^2)\cos^2\varphi\sqrt{((y-b)^2+z^2)(1+\tan^2\varphi)}}\Bigg]$$

Après réécriture et simplification, on a :

$$E_z(x,y,z) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\arctan\left(x-a/\sqrt{(y+b)^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(x+a/\sqrt{(y+b)^2+z^2}\right)} \frac{(y+b)\,\mathrm{d}\theta}{(((y+b)^2+z^2)\tan^2\theta+z^2)\cos\theta} - \int_{\arctan\left(x-a/\sqrt{(y-b)^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(x+a/\sqrt{(y-b)^2+z^2}\right)} \frac{(y-b)\,\mathrm{d}\varphi}{(((y-b)^2+z^2)\tan^2\varphi+z^2)\cos\varphi}\right]$$

Comme $((y+b)^2+z^2)\tan^2\theta+z^2 = \frac{(y+b)^2\sin^2\theta+z^2}{\cos^2\theta}$, on peut le réécrire :

$$E_z(x,y,z) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\arctan\left(x-a/\sqrt{(y+b)^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(x+a/\sqrt{(y+b)^2+z^2}\right)} \frac{(y+b)\cos\theta\mathrm{d}\theta}{(y+b)^2\sin^2\theta+z^2} - \int_{\arctan\left(x-a/\sqrt{(y-b)^2+z^2}\right)}^{\arctan\left(x+a/\sqrt{(y-b)^2+z^2}\right)} \frac{(y-b)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{(y-b)^2\sin^2\varphi+z^2}\right]$$

On introduit :

$$U = \frac{(y+b)\sin\theta}{z},\quad \mathrm{d}U = \frac{y+b}{z}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$V = \frac{(y-b)\sin\varphi}{z},\quad \mathrm{d}V = \frac{y-b}{z}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

Les limites d'intégration sont alors définies comme :

$$\begin{aligned} f(x\pm a, y\pm b) &= \frac{y\pm b}{z}\sin\left(\arctan\left(\frac{x\pm a}{\sqrt{(y\pm b)^2+z^2}}\right)\right) \\ &= \frac{y\pm b}{z}\frac{x\pm a}{\sqrt{(y\pm b)^2+z^2+(x\pm a)^2}} \end{aligned}$$

Si on insère ce résultat dans l'expression de E_z, on obtient :

$$\begin{aligned} E_z(x,y,z) &= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{U=f(x-a,y+b)}^{f(x+a,y+b)} (y+b)\frac{z}{y+b}\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}U}{U^2+1} - \int_{V=f(x-a,y-b)}^{f(x+a,y-b)} (y-b)\frac{z}{y-b}\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}V}{V^2+1}\right] \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[[\arctan U]_{U=f(x-a,y+b)}^{f(x+a,y+b)} - [\arctan V]_{V=f(x-a,y-b)}^{f(x+a,y-b)}\right] \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\arctan\left(\frac{y+b}{z}\frac{x+a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2+(x+a)^2}}\right) - \arctan\left(\frac{y+b}{z}\frac{x-a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2+(x-a)^2}}\right)\right. \\ &\quad \left. - \arctan\left(\frac{y-b}{z}\frac{x+a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2+(x+a)^2}}\right) + \arctan\left(\frac{y-b}{z}\frac{x-a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2+(x-a)^2}}\right)\right] \end{aligned}$$

En résumé :

$$
\begin{aligned}
E_x(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[&\operatorname{argsh}(\frac{y+b}{\sqrt{(x+a)^2+z^2}}) - \operatorname{argsh}(\frac{y-b}{\sqrt{(x+a)^2+z^2}}) \\
&- \operatorname{argsh}(\frac{y+b}{\sqrt{(x-a)^2+z^2}}) + \operatorname{argsh}(\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+z^2}})\Bigg] \\
E_y(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[&\operatorname{argsh}(\frac{x+a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2}}) - \operatorname{argsh}(\frac{x-a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2}}) \\
&- \operatorname{argsh}(\frac{x+a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2}}) + \operatorname{argsh}(\frac{x-a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2}})\Bigg] \\
E_z(x,y,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[&\arctan\left(\frac{y+b}{z}\frac{x+a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2+(x+a)^2}}\right) - \arctan\left(\frac{y+b}{z}\frac{x-a}{\sqrt{(y+b)^2+z^2+(x-a)^2}}\right) \\
&- \arctan\left(\frac{y-b}{z}\frac{x+a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2+(x+a)^2}}\right) + \arctan\left(\frac{y-b}{z}\frac{x-a}{\sqrt{(y-b)^2+z^2+(x-a)^2}}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$